6 Vecteurs du plan

Livre p.174.

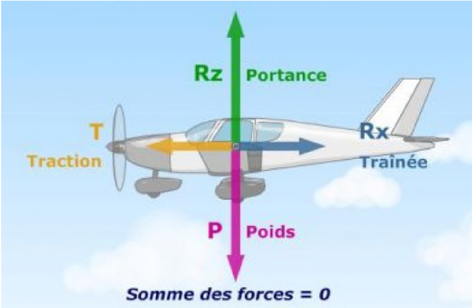
Objectifs :

- Définir une translation et le vecteur associé
- Savoir caractériser et reconnaître deux vecteurs égaux, deux vecteurs opposés
- Savoir construire géométriquement la somme de deux vecteurs
- Connaître et utiliser la relation de Chasles
- Savoir construire géométriquement le produit d'un vecteur par un réel

Aperçu historique :

la notion de vecteur est à la convergence de deux grands domaines des mathématiques qui ont longtemps évolués séparément : la géométrie (étude des formes) et l'algèbre (étude des nombres). Ce sont les mathématiciens Arabes qui ont fait le lien entre la géométrie des Grecs et l'algèbre des Chinois. C'est l'idée d'utiliser des coordonnées qui permet de traduire un problème géométrique sous forme de calculs, et inversement. Par exemple, ***Omar Khayyam*** *(1048 - 1131) cherche les solutions d'un problème purement algébrique : trouver les racines d'un polynôme du troisième degré. Un système de coordonnées lui permet de visualiser ces racines comme les abscisses des intersections de deux courbes.*
Le système des coordonnées (géométrie analytique) est ensuite repris en Europe, et utilisé en mécanique (chute des corps) par ***Galilée*** *(1564 - 1642), en optique par* ***Pierre de Fermat*** *(1601 - 1665) et* ***René Descartes*** *(1596 - 1650), et en astronomie par* Isaac Newton *(1643 - 1727). Le terme* vecteur *apparait en français sous la plume de* ***Pierre-Simon de Laplace*** *(1749 - 1827) dans l'expression "rayon vecteur", encore dans un contexte astronomique. Il vient du latin* vector *et désigne le conducteur d'un chariot.*

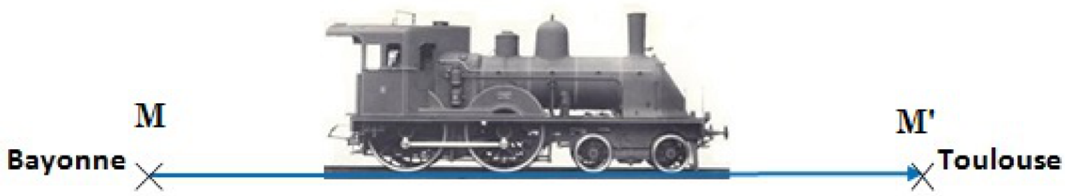
La formalisation des vecteurs s'est faite durant la première moitié de XIXème siècle, et est le fruit de travail de ***Bernard Bolzano*** *(1781 - 1848), puis Jean-Victor Poncelet (1788 - 1867) et Michel Chasles (1793 - 1880). Enfin, la formalisation encore actuellement enseignée est l'œuvre de* ***Giusto Bellavitis*** *(1803 - 1880).*
Les vecteurs sont très largement utilisés en physique, pour modéliser des déplacements, des vitesses, des accélérations, des forces, des champs électro-magnétiques, etc...



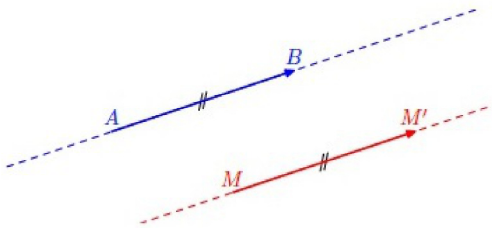
Nous traiterons de l'approche des vecteurs par leurs coordonnées au chapitre 9.

1. Translation

Une translation peut être vue comme un déplacement “sur un rail rectiligne”. Ce rail sera symbolisé par une droite, qui donnera la direction du déplacement ; il faudra tenir compte du sens de parcours (de Toulouse vers Bayonne ou de Bayonne vers Toulouse), ainsi que de la distance parcourue.

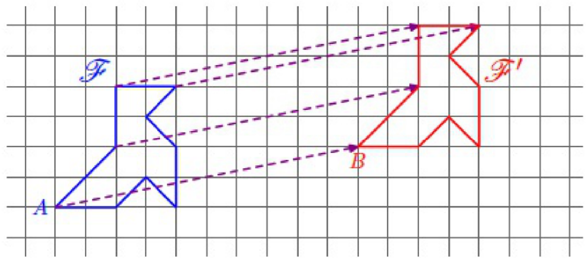


Définition 6.1 Soient A et B deux points distincts du plan et soit M un point quelconque.
Lorsqu'on fait “glisser” le point M suivant la *direction* de (AB), dans le *sens* de A vers B et de la *longueur* AB, on obtient un point M' qui est appelé image de M par la translation qui transforme A en B.



Direction et sens :
On dit que (MM') et (AB) ont la même *direction* car elles sont parallèles.
Le sens de A vers B n'est pas le même que celui de B vers A.

Définition 6.2 L'image d'une figure par une translation est la figure constituée des images de chacun des points de la figure initiale.



$\mathscr{F}'$ est l'image de $\mathscr{F}$ par la translation qui transforme A en B.

Propriété 6.1 Si ***M'*** est l'image de M par la translation qui transforme A en B alors AB***M'***M est un parallélogramme.

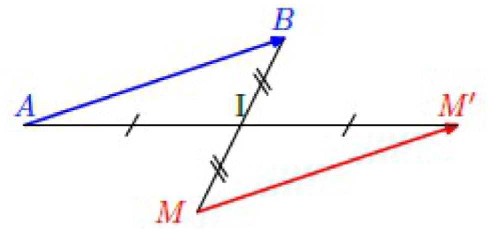
Démonstration : idée de la démonstration

- les droites (AB) et (MM') ont la même direction donc elles sont parallèles ;
- les points A et B sont dans le même sens que les points M' et M donc le quadrilatère $ABM'M$ n'est pas croisé ;
- on a $AB = MM'$.

Or, un quadrilatère non croisé ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme donc, $ABM'M$ est un parallélogramme.

Propriété 6.2 Réciproquement, si AB***N***M est un parallélogramme, alors ***N*** est l'image de M par la translation qui transforme A en B.

Construction :
Pour construire l'image M' de M par la translation qui transforme A en B, il suffit donc de construire le milieu I de $[BM]$ et le point M' est alors l'image de M par la symétrie de centre I.



2. Vecteur du plan

A. Vecteur et translation

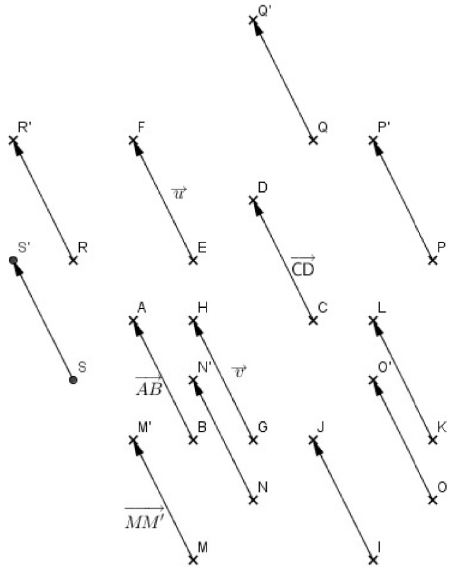
Définition 6.3 Un vecteur du plan est un objet mathématique défini par :

- une *direction* (c'est à dire une droite) ;
- un *sens* (sens de parcours sur la droite) ;
- une *longueur* qu'on appelle aussi *norme*.

Un vecteur est noté par une lettre surmontée d'une flèche de la gauche vers la droite ($\vec{u}$) et la norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $||\vec{u}||$.

Remarques :

- Les trois caractéristiques d'un vecteur (direction, sens et norme) sont les mêmes que celles d'une translation. Désormais la translation qui transforme un point A en un point B sera nommée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$. Un vecteur caractérise donc entièrement une translation.

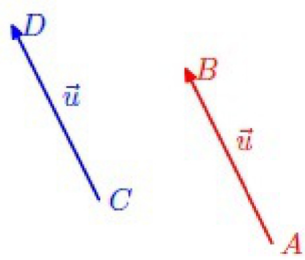


- Les trois caractéristiques d'un vecteur (direction, sens et norme) ne permettent pas de lui donner une *position*. Lorsque l'on "trace" un vecteur, on n'en donne en fait qu'un *représentant*. Chaque vecteur a **une infinité de représentants** : voir la figure ci-contre !

Vocabulaire :
Sur la figure ci-contre on a représenté deux fois un vecteur $\vec{u}$.
La flèche de droite est le représentant de $\vec{u}$ d'*origine* A et d'*extrémité* B.

On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$:

- la direction de $\vec{u}$ est celle de la droite (AB) (et de la droite (CD)) ;
- le sens de $\vec{u}$ est celui de A vers B (ou de C vers D) ;
- la norme de $\vec{u}$ est la distance AB (ou la distance CD). On a $||\vec{u}|| = AB = CD$.



Cas particulier :
Le vecteur qui a une norme nulle est appelé **vecteur nul**. On le note $\vec{0}$. Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens.

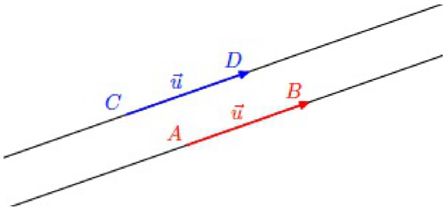
B. Vecteurs égaux

Définition 6.4 Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

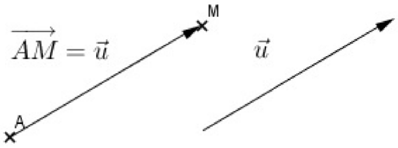
Exemple :

Sur la figure ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux car :

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles (même direction) ;
- le sens de A vers B est le même que celui de C vers D ;
- la distance AB et la distance CD sont égales.

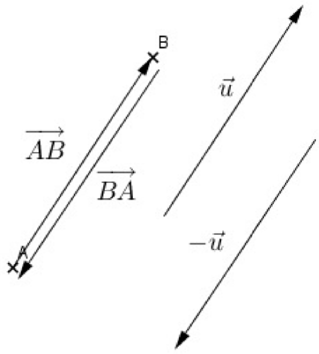


Propriété 6.3 Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Pour un point A donné, il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$.
On dit aussi qu'il existe un unique représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour origine A.
Son extrémité est le point M. On a alors $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$.



Définition 6.5 Deux vecteurs sont dits opposés s'ils ont la même direction, la même norme mais qu'ils sont de sens contraire.

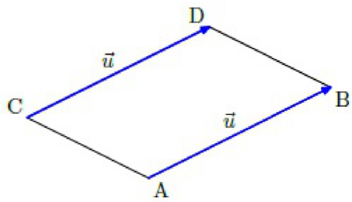
Notation : On note $-\vec{u}$ le vecteur opposé au vecteur $\vec{u}$.
Remarque : Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



C. Vecteurs et parallélogramme

Propriété 6.4 Soit A, B, C et D quatre points du plan :

- si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $AB\boldsymbol{D}C$ est un parallélogramme (éventuellement aplati) ;
- réciproquement, si $AB\boldsymbol{D}C$ est un parallélogramme (éventuellement aplati), alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Remarque :
La propriété 6.4 peut aussi s'énoncer comme suit :
soit A, B, C et D quatre points non alignés du plan. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
Les propositions « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ » et « $ABDC$ est un parallélogramme » sont dites *équivalentes*.

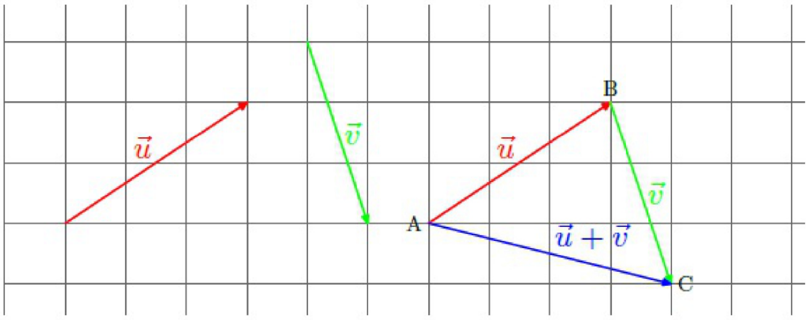
3. Somme de deux vecteurs

Définition 6.6 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On obtient le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ en procédant comme suit :

- on choisit un point A et on construit le représentant[a] de $\vec{u}$ d'origine A ; ce représentant a pour extrémité B ;
- on construit le représentant de $\vec{v}$ d'origine B, il a pour extrémité C ;
- on a alors $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

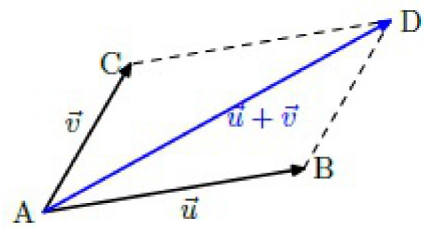
On écrit aussi : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Cette égalité est appelée relation de Chasles.

a. Il est unique : voir la propriété 6.3



Propriété 6.5 (règle du parallélogramme) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant la même origine A. Si D est le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme (éventuellement aplati), alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$



Attention ! En général, $||\vec{u} + \vec{v}|| \neq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$. Sur la figure ci-dessus, $AD \neq AB + AC$.

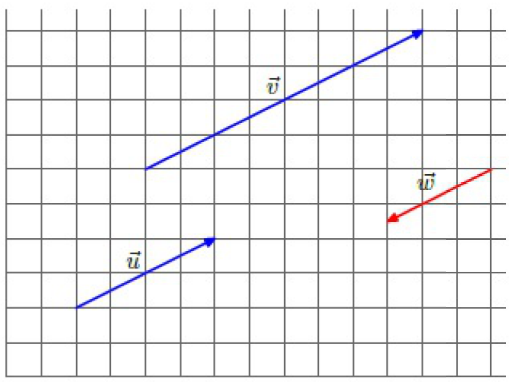
4. Produit d'un vecteur par un réel

Définition 6.7 Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan et λ un réel.
Si $\lambda \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur ayant :

- la même direction que le vecteur $\vec{u}$;
- le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et le sens contraire de $\vec{u}$ si $\lambda < 0$;
- **si** $\lambda \geq 0$, alors $||\lambda\vec{u}|| = \lambda \times ||\vec{u}||$;
  si $\lambda < 0$, alors $||\lambda\vec{u}|| = -\lambda \times ||\vec{u}||$.

Si $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors on a : $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.

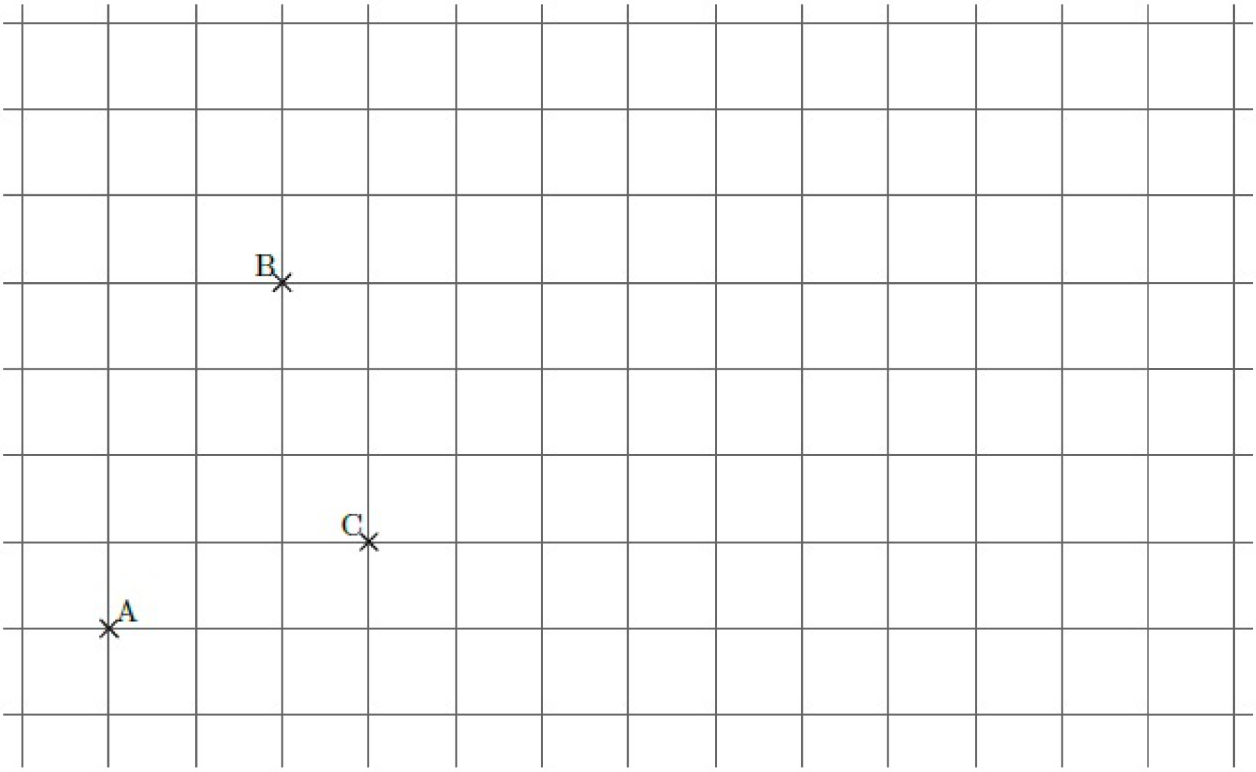
Exemple :
On a tracé ci-contre le représentant d'un vecteur $\vec{u}$. En posant $\vec{v} = 2\vec{u}$ et $\vec{w} = -\frac{3}{4}\vec{u}$, on a :



$\vec{v}$ a la même direction que $\vec{u}$, il est de même sens car $2 > 0$ et sa norme vaut $2||\vec{u}||$.

$\vec{w}$ a la même direction que $\vec{u}$, il est de sens contraire car $-\frac{3}{4} < 0$ et sa norme vaut $\frac{3}{4}||\vec{u}||$.

Exercice :
Dans le quadrillage ci-après, on a placé quatre points A, B, C et D.



Placer les points E, F et G vérifiant les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}; \qquad \overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EC}; \qquad \overrightarrow{EG} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + BF$$

Propriété 6.6 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et λ [a] et μ [b] deux réels quelconques. Alors on a :

$$\lambda \times (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}; \qquad (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}; \qquad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$$

a. λ (ou Λ en majuscule) se lit *lambda* ; c'est la 11^{e} lettre de l'alphabet grec. Elle correspond à notre « L ».
b. μ se lit *mu* ; c'est la 12^{e} lettre de l'alphabet grec. Elle correspond à notre « M ».

Exemple :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors :
$2\vec{u} + 3\vec{u} = (2+3)\vec{u} = 5\vec{u}$.
$3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 2(\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{u} - 6\vec{v} + 2\vec{u} + 2\vec{v} = (3+2)\vec{u} + (-6+2)\vec{v} = 5\vec{u} - 4\vec{v}$.
$3(\vec{u} + 2\vec{v}) + \vec{u} - 4(\vec{u} + \vec{v}) - 2\vec{v} = 3\vec{u} + 6\vec{v} + \vec{u} - 4\vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{v} = (3+1-4)\vec{u} + (6-4-2)\vec{v} = \vec{0}$.